نویسنده: **Wieslaw Krawcewicz**

عدد پی و محیط زمین

مترجم: **عباس قلعه‌پور اقدم**
دبیر ریاضی ارومیه

چکیده

در این مقاله، پس از پرداختن مختصر به «تاریخچهٔ عدد پی» کــه یکی از مهم‌ترین ثابت‌های ریاضی اســت، با یــک کار عملی، تقریبی از π به دست می‌آوریم و سپس راهکار ارشمیدس را برای محاســبهٔ قطر زمین ارائه می‌کنیم.

کلیدواژه‌ها: **پی، دایره، قطر، زمین، اراتستن**

تاریخچه

مشــهورترین مقدار ثابت در ریاضی، نسبت محیط دایره به قطر آن اســت که به «عدد پی» موسوم است و با حرف یونانی π نمایش داده می‌شود:

$$\pi = \frac{\text{محیط}}{\text{قطر}}$$

بابلیان این مقدار را ۳/۱ در نظر می‌گرفتند که برای اهداف آن‌ها تقریب خوبی بود. قدیمی‌ترین اثر شناخته شده درخصوص تقریب پی، «پاپیروس رایند»[1] مربوط به مصر باستان[2] است که قدمت آن به شانزده قرن پیش از میلاد می‌رسد. در این سند، از مقدار $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ یا ۳/۱۶۰۵ به عنوان تقریب π یاد شده است. فیلسوفان و ریاضی‌دانان یونان باســتان از جمله **ارشمیدس**[3] که در حدود ۲۲۰ سال پیش از میلاد می‌زیستند، π را عددی کمتر از $3\frac{1}{7}$ و بیشتر از $3\frac{10}{71}$ تخمین زده بودند. بعدها **بطلمیوس**[4] در اســکندریه، مقدار تقریبی ۳/۱۴۱۶ را به‌دست آورد. در حدود ۵۰۰ سال پس از میلاد، **آریبهطه**، ریاضی‌دان هنــدی، که روی جدول‌های مثلثاتــی کار می‌کرد نیز همان مقدار ۳/۱۴۱۶ را به‌کار می‌برد. **چانگ چی‌تسو**[5]، ریاضی‌دان چینی، که در حدود ۴۷۰ میلادی می‌زیست، برای π مقداری بیــن ۳/۱۴۱۵۹۲۶ و ۳/۱۴۱۵۹۲۷ را به‌دســت آورده بود. این تقریب تا هزار ســال پس از او بی‌رقیب بود، تا اینکه ریاضی‌دان و ستاره‌شناس مشهور ایرانی، **جمشید کاشانی**، در کتاب «رسالهٔ محیطیه»، عدد پی را به کمــک یک ۸۰۵۳۰۶۳۶۸ ضلعی منتظم تا ۱۶ رقم اعشار محاســبه کرد که نوعی رکوردشکنی محسوب می‌شد.

۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲= پی با دقت ۱۶ رقم اعشار

پــس از آن، ریاضی‌دانــان اقصا نقــاط جهان برای محاســبهٔ تقریبی عدد پی تلاش زیــادی انجام دادند که نتایج آن محاســبهٔ این عدد تا ۱۴۰، ۲۰۰ و ســپس ۵۰۰ رقم اعشار بود، تا اینکه در ۱۸۵۳ میلادی، **ویلیام شانکس**[6] توانست π را تا ۷۰۷ رقم اعشار محاسبه کند.

مســئلهٔ یافتن مقدار دقیق عدد پی دانشــمندان و ریاضی‌دانان را برای قرن‌های متمادی مشغول و مجذوب خود ســاخته بود تا اینکه **یوهان هاینریش لامبرت**[7]، ریاضی‌دان سوئیســی، که در فاصلهٔ سال‌های ۱۷۲۸ تا ۱۷۷۷م می‌زیست، این مسئله را حل کرد. لامبرت ثابت کرد که عدد پی نمی‌تواند به‌صورت خارج‌قسمت دو عدد صحیح یا به‌صورت اعشاری با ارقام متناهی نوشته شود. در واقع، با به دســت آوردن تقریب‌هایی با ارقام بیشتر،

ما به π نزدیک و نزدیک‌تر می‌شـــویم، ولی هیچ مقداری نمی‌توانـــد دقیقاً برای π یافت شـــود. امـــروزه ما چنین عددهایی را ناگویا (گنگ) می‌نامیم. یونانیان باستان قبلاً به وجود اعداد گنـــگ پی برده بودند. آنان این مجموعه از اعـــداد را «عدد غیراندازه‌پذیر» یا «عدد اندازه ناپذیر» می‌نامیدند. برای مثال، آن‌ها می‌دانســـتند که طول قطر مربعی که طول ضلع آن واحد است، چنین عددی است. این مقدار که با $\sqrt{۲}$ نموده می‌شود و برابر عدد x است، به‌طوری که $x^۲=۲$، نمی‌تواند به‌صورت کســـر بیان شود. یونانیان باستان گنگ بودن $\sqrt{۲}$ را نه به روش جبری که با روش هندسی اثبات کرده بودند.

امروزه در مدارس از مقدار تقریبی ۳/۱۴ برای عدد پی استفاده می‌کنیم که برای نوع خاصی از مسائل که در کلاس درس مورد بحث قرار می‌گیرند، تقریب خوب و کم‌خطایی محسوب می‌شود. اما برای محاسباتی که در پروژه‌های اساسی نظیر تعیین مسیر حرکت کشتی و هواپیما، کاربردهای نظامی و ســـایر ملزومات زندگی امـــروزه کاربرد دارند، به تقریـــب بهتری نیاز داریم. در این‌گونه موارد، غالباً π با ده رقم اعشـــار کافی اســـت. حتی برای محاسبات در زمینهٔ نجوم به بیشتر از پنجاه رقم اعشار پی نیاز نداریم، هر چند با قدرت ابررایانه‌های امـــروزی قادریم ایـــن عدد را با دقت بیشـــتر از صدها میلیون رقم اعشـــار محاسبه کنیم. اطلاعات زیادی در مورد عدد پی در اینترنت قابل دسترس است که از آن جمله می‌توانید به آدرس‌های زیر مراجعه کنید:

۱) http://www.angio.net/pi/digits.htmsl

۲) archive.org/stream/pi_to_100000000_places/ pitxt.

با مراجعه به ســـایت‌های ذکر شـــده و سایر منابع مربوط در اینترنـــت می‌توانید عدد پی را با بیش از صد میلیون رقم اعشار به‌دست آورید. ما در اینجا این عدد را با ۲۰۰ رقم اعشار برای شما ارائه می‌کنیم.

π =۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵	۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶	۲۶۴۳۳۸۳۲۷۹	۵۰۲۸۸۴۱۹۷۱
۶۹۳۹۹۳۷۵۱۰	۵۸۲۰۹۷۴۹۴۴	۵۹۲۳۰۷۸۱۶۴	۰۶۲۸۶۲۰۸۹۹
۸۶۲۸۰۳۴۸۲۵	۳۴۲۱۱۷۰۶۷۹	۸۲۱۴۸۰۸۶۵۱	۳۲۸۲۳۰۶۶۴۷
۰۹۳۸۴۴۶۰۹۵	۵۰۵۸۲۲۳۱۷۲	۵۳۵۹۴۰۸۱۲۸	۴۸۱۱۱۷۴۵۰۲
۸۴۱۰۲۷۰۱۹۳	۸۵۲۱۱۰۵۵۵۹	۶۴۴۶۲۲۹۴۸۹	۵۴۹۳۰۳۸۱۹۶

تجربه‌ای برای یافتن تقریبی از π

چون π نســـبت محیط دایره به قطر آن است، پس اگر محیط دایره را با C و قطر آن را با d نمایش دهیم، می‌توانیم بنویسیم:

$C=\pi \times d$

حال اگر شعاع این دایره را r فرض کنیم، با توجه به اینکه $d=۲r$، به راحتی خواهیم داشت:

$C=۲\pi r$

حال که دانســـتیم یافتن مقـــدار دقیق π ناممکن است، با دخترم تصمیم گرفتیم آزمایشی ترتیب بدهیم تا ما نیز تقریبی از عدد π یافته باشـــیم. بدین منظور، از چرخ دوچرخهٔ کهنه‌ای با قطر ۶۳/۷ سانتی‌متر استفاده کردیم.

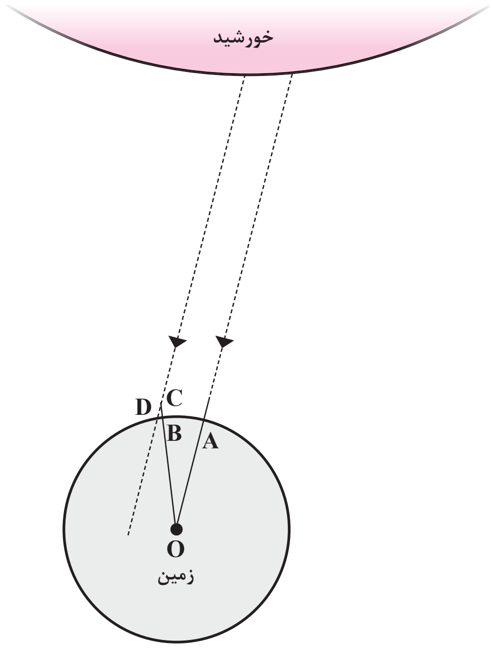
نقطه‌ای را روی لاســـتیک چرخ، در قسمتی که با زمین تماس داشـــت، انتخاب کردیم و با ماژیک علامت گذاشـــتیم. روی زمیـــن هم در نقطـــهٔ مربوطه علامت گذاشتیم. سپس چرخ را ۲۰ بار روی یک خط مستقیم به جلو چرخاندیم تا نقطهٔ علامت‌گذاری شـــده دوباره به زمین برســـد. مســـافتی را که چرخ طی کرد، اندازه گرفتیم. این مقدار برابر ۳۹/۶۹ متر شد. عدد ۳۹۶۹ را بر ۶۳/۷×۲۰ تقســـیم کردیم و عدد ۳/۱۱۵۳۸۴۶۱۵ را به‌عنوان تقریبی از π به‌دست آوردیم.

راهکار اراتستن برای اندازه‌گیری محیط زمین

در میـــان پیشـــرفت‌های ریاضی یونان باســـتان، هیچ‌کدام جالب‌تر از محاسبهٔ محیط و قطر زمین توسط «اراتستن»[۸] نبوده است. اراتستن متوجه شده بود که در شهر «سین»[۹] (آســـوان امروزی) واقع در مصر، در ظهر روز اول تابســـتان، نور خورشید به‌طور عمودی به درون چاه عمیقی که در آن شـــهر وجود داشت، می‌تابد و ته چاه را روشـــن می‌کند. او همچنین دقت کرده بود که در این زمانِ به‌خصوص، ســـتون‌های عمودی این شهر ســـایه‌ای از خود ندارند. معنای این مشاهدات، عمودی تابیدن پرتوهای خورشـــید در ظهر روز اول تابستان بر شهر «ســـین» بود. در صورتی‌که در همان روز در شهر اسکندریه، واقع در شمال سین، اراتستن شاهد بود که ستون‌های عمودی سایه دارند.

ولی در آن زمان به‌خصوص با اندازه‌گیری طول سایه و ارتفاع یکی از این ستون‌های عمودی، زاویهٔ تابش نور خورشـــید را اندازه گرفت و عدد ۷/۲ درجه را به‌دست آورد. چون این زاویه با زاویه‌ای که امتدادهای دو ستون عمودی در دو شهر آســوان و اسکندریه ساخته بودند، برابر بود (دلیل این امر را در توضیح شــکل آورده‌ایم)، متوجه شد زاویه‌ای مرکزی که امتدادهای دو ستون در مرکز زمین می‌سازند، برابر ۷/۲ درجه است.

این یعنی کمان و اصل بین دو شهر اندازه‌ای معادل ۷/۲ درجه دارد و چون فاصلهٔ دو شهر در آن زمان حدود ۸۳۳ کیلومتر محاسبه شده بود، اراتستن با نوشتن تناسب $\frac{۸۳۳}{x} = \frac{۷/۲}{۳۶۰}$، مقدار x را که همان محیط زمین اســت را ۴۱۶۵۰ کیلومتر به‌دست آورد که با مقدار واقعی آن‌که حدود چهل هزار کیلومتر است، ۱۶۵۰ کیلومتر اختلاف دارد. دلیل این اختلاف محاســبهٔ نادقیق فاصلهٔ دو شهر بــود. در آن زمان، از واحــد «Stadium» که معادل یک ششم کیلومتر است، استفاده می‌شد. همچنین، باید توجه داشــت که مسیر بین دو شهر، به دلیل اینکه زمین کرهٔ کامل نیست، نمی‌تواند کمان دایره‌ای واقعی در نظر گرفته شود. در ادامه، اراتستن با تقسیم عدد ۴۱۶۵۰ بر عدد پی، قطر زمین را ۱۳۲۵۷ کیلومتر محاسبه کرد.



در شکل، پرتوهای خورشیدی که به‌صورت موازی بر زمین می‌تابند، به نمایش گذاشــــته شده‌اند. نقاط A، O و B به ترتیب موقعیت‌های شهر آسوان، مرکز زمین و شهر اسکندریه هســـتند. در نقاط A و B به ترتیب ستون‌های عمودی در دو شهر آسوان و اسکندریه را رسم کرده‌ایم. همچنین، در این دو نقطه، مماس‌هایی بر دایرهٔ نمایشگر زمین کشیده‌ایم تا با توجه به اینکه شعاع بر خط مماس در یک نقطه از دایره عمود است، رسم شکل راحت‌تر باشد. BC و BD به ترتیب ستون عمودی و سایهٔ آن در اسکندریه هستند. زاویهٔ BCD زاویهٔ تابش خورشید در اسکندریه در آن زمان به‌خصوص است که طبق محاسبهٔ اراتستن ۷/۲ درجه بود. زاویهٔ AOB یعنی زاویهٔ بین امتدادهای پرتوهای خورشید، به دلیل اینکه OC مورب دو خط موازی است، با زاویه BCD برابر است و کمان AB (کمان و اصل دو شهر) با زاویهٔ مرکزی نظیرش یعنی AOB برابر است.

تمرین

شما نیز با استفاده از وسایل سادهٔ دایره‌ای شکل مانند لیوان، قابلمه، تشت و بشکه می‌توانید تقریبی از π به‌دست آورید. پس دست به‌کار شوید!

پی‌نوشت‌ها

۱. پاپیروس رایند (Rhind Mathematical Papyrus): طومار پاپیروســی با بلندی ۳۳ ســانتی‌متر و عرض ۵۶۵ سانتی‌متر که در یک معبد در شهر تبس (Thebes) پیدا شــده، پرارزش‌ترین منبع اطلاعات در مورد ریاضیات مصر باســتان است. طومار را در ســال ۱۸۵۸ میلادی مرد اسکاتلندی ۲۵ ساله‌ای به نام «هنری رایند» (Henry Rhind) که به‌خاطر مداوا به مصر رفته و در آنجا به باستان‌شناسی علاقمند شده بود، در بازاری در لوکسور (Luxor) مصر خرید. پس از مرگ زود هنگام رایند در ۳۰ سالگی، طومار در سال ۱۸۶۴ م به موزهٔ لندن انتقال یافت و از آن زمان به این نام موسوم شد.

2. Ancient Egypt

۳. ارشمیدس (۲۸۷ ق.م تا ۲۱۲ ق.م) فیلسوف، ریاضی‌دان و منجم یونان باستان که از اهالی جزیرهٔ ساموس در دریای مدیترانه بود و در جوانی برای آموختن دانش به اسکندریهٔ مصر رفت.

۴. بطلمیوس (۱۰۰ تا ۱۷۰ بعد از میلاد) ریاضی‌دان، ستاره‌شناس و جغرافی‌دانی در اسکندریهٔ مصر بود.

۵. چانگ چی‌تسو (Chung Chi Tsu)، ریاضی‌دان و ستاره‌شناس چینی قرن پنجم میلادی.

۶. ویلیام شانکس (۱۸۱۲ تا ۱۸۸۲ میلادی) ریاضی‌دان آماتور انگلیسی که با فرمول $\frac{\pi}{۴} = ۴\mathrm{Arc\,tan}(\frac{۱}{۵}) - \mathrm{Arc\,tan}(\frac{۱}{۲۳۹})$ تا ۷۰۷ رقم که ۵۲۷ رقم آن صحیح بود، پی را محاسبه کرد.

۷. یوهان هاینریش لامبرت (Johann Heinrich Lambert)، فیلسوف و ریاضی‌دان سوئیسی.

۸. اراتستن منجم مدرسهٔ اسکندریهٔ مصر بود که به سال ۲۷۴ پیش از میلاد در آسوان کنونی متولد شد و در ۱۹۶ پیش از میلاد درگذشت.

۹. شهر سین (Cyrene city)، آسوان کنونی واقع در مصر است.

منبع

1. Kraw cewicz, Wieslaw, The Number π and the Earth's circumference, Pi In the sky, December 2000.